अध्याय 2

संबंध एवं फलन

2.1 समग्र अवलोकन (Overview)

इस अध्याय में दो समुच्चयों के अवयवों के युग्म (pair) के बारे में विचार किया गया है और फिर युग्म के घटकों (elements) के बीच संबंध का परिचय कराया गया है। व्यावहारिक रूप से अपने जीवन में प्रतिदिन हम दो समुच्चयों के सदस्यों का युग्म बनाते रहते हैं। उदाहरणार्थ, दिन के प्रत्येक घंटे को दूरदर्शन के मौसम विज्ञानी द्वारा पठित स्थानीय तापमान के साथ युग्मित किया जाता है। एक अध्यापक, यह जानने के लिए कि कक्षा ने किसी पाठ को कितनी अच्छी तरह समझा है, बहुधा प्राप्तांकों और उन प्राप्तांकों को पाने वाले विद्यार्थियों की संख्याओं का युग्म बनाते हैं। अंत में, हम ऐसे विशेष संबंधों के बारे में जानेंगे जो फलन (Function) कहलाते हैं।

2.1.1 *समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian products of sets)*

परिभाषा : दिये हुए दो अतिरिक्त समुच्चयों A तथा B के लिए, उन सभी क्रमित (Ordered) युग्मों (x,y) का समुच्चय, जहाँ $x \in$ A और $y \in$ B, A तथा B का कार्तीय गुणन कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप में, हम लिखते हैं कि.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ और } y \in B\}$$

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{4, 5\}$, तो

$$A \times B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

तथा $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

(i) दो क्रमित युग्म समान होते हैं, यदि और केवल यदि उनके संगत (Corresponding) प्रथम घटक समान हों और संगत द्वितीय घटक भी समान हों, अर्थात् $(x, y) = (u, v)$, यदि और केवल यदि $x = u, y = v$.

(ii) यदि $n(A) = p$ और $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = p \times q$

(iii) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. यहाँ (a, b, c) एक क्रमित त्रियक (Ordered triplet) कहलाता है।

2.1.2 ***संबंध (Relations)* :** किसी अतिरिक्त समुच्चय A से अतिरिक्त समुच्चय B में संबंध R, कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उप-समुच्चय होता है। यह उप-समुच्चय, $A \times B$ के क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों तथा द्वितीय घटकों के बीच कोई प्रतिबंध (संबंध) लगाने से प्राप्त होता है। इन क्रमित युग्मों के द्वितीय घटक, प्रथम घटक का प्रतिबिंब (image) कहलाता है।

किसी संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को R का प्रांत (domain) तथा द्वितीय घटकों के समुच्चय को R का परिसर (range) कहते हैं।

उदाहरण के लिए मान लीजिए कि $R = \{(1, 2), (-2, 3), (\frac{1}{2}, 3)\}$ एक संबंध है, तो R का प्रांत $= \{1, -2, \frac{1}{2}\}$ तथा R का परिसर $= \{2, 3\}$.

(i) किसी संबंध का निरूपण या तो रोस्टर रूप या समुच्चय निर्माण रूप द्वारा किया जा सकता है अथवा उसका निरूपण एक तीर आरेख (arrow diagram) द्वारा भी किया जा सकता है, जो उसका एक दृष्टि चित्रण (visual representation) भी है।

(ii) यदि $n(A) = p$, $n(B) = q$ तो $n(A \times B) = pq$ और समुच्चय A से समुच्चय B में संबंधों की कुल संभव संख्या $= 2^{pq}$

2.1.3 फलन *(Functions)* : किसी समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध f एक फलन कहलाता है, यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में एक और केवल एक प्रतिबिंब होता है।

दूसरे शब्दों में एक फलन ऐसा संबंध है जिसके दो युग्मों के प्रथम घटक समान न हों।

संकेतन $f: X \rightarrow Y$ का तात्पर्य है कि f, X से Y में एक फलन है। X को f का प्रांत तथा Y को f का सहप्रांत (Co-domain) कहते हैं। एक प्रदत्त अवयव $x \in X$ से संबंधित f के अंतर्गत, Y में एक अद्वितीय (unique)अवयव y होता है।

f के अंतर्गत, x से संबंधित अद्वितीय अवयव y को प्रतीक $f(x)$ द्वारा निरूपित करते हैं और उसे 'x का f', या x पर f का मान' या f के अन्तर्गत x का **प्रतिबिंब**' कहते हैं।

$f(x)$ के समस्त मानों को एक साथ लेने से बने समुच्चय को f का परिसर या f के अंतर्गत x का **प्रतिबिंब** कहते हैं। प्रतीकात्मक रूप में,

$$f \text{ का परिसर} = \{ y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$$

परिभाषा : एक ऐसा फलन, जिसका परिसर **R** (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) या उसका कोई उप-समुच्चय हो, वास्तविक मान फलन (real valued function) कहते हैं। इसके अतिरिक्त, यदि इसका प्रांत भी या तो **R** अथवा **R** का एक उप समुच्चय हो तो इसे वास्तविक फलन कहते हैं।

2.1.4 कुछ विशेष प्रकार के फलन *(Some specific types of functions)*

(i) **तत्समक फलन (Identity function):**

नियम (प्रतिबिंध) $y = f(x) = x$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित

फलन $f: R \rightarrow R$, तत्समक फलन कहलाता है।

f का प्रांत $= \mathbf{R}$, f का परिसर $= R$

(ii) **अचर फलन (Constant function):**

नियम अथवा प्रतिबंध $y = f(x) = C$, $x \in \mathbf{R}$, जहां C एक अचर है, द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$, एक अचर फलन कहलाता है।

$$f \text{ का प्रांत} = \mathbf{R}, \text{ तथा } f \text{ का परिसर} = \{C\}$$

(iii) **बहुपद या बहुपदीय फलन (Polynomial function):**

प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए प्रतिबंध $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2 x^2 + ... + a_nx^n$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$ और a_0, $a_1, a_2 ... a_n \in \mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, एक बहुपद फलन कहलाता है।

(iv) **परिमेय फलन (Rational function):**

$\frac{f(x)}{g(x)}$ प्रकार के वास्तविक फलन, जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$, x के ऐसे बहुपद फलन हैं, जो एक ऐसे प्रांत में परिभाषित हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$, परिमेय फलन कहलाते हैं। उदाहरणार्थ, नियम $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbf{R} - \{-2\}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} - \{-2\} \to \mathbf{R}$, एक परिमेय फलन है।

(v) **मापांक फलन (Modulus function):**

नियम $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन, मापांक फलन कहलाता है।

f का प्रांत $= \mathbf{R}$

f का परिसर $= \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

(vi) **चिह्न फलन (Signum function):**

नियम $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ द्वारा

परिभाषित वास्तविक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, चिह्न फलन कहलाता है। f का प्रांत $= \mathbf{R}$, f का परिसर $= \{1, 0, -1\}$

(vii) **महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integer function):**

नियम $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक मान ग्रहण (धारण) करता है, द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता है।

अत: $f(x) = [x] = -1, -1 \leq x < 0$ के लिए

$f(x) = [x] = 0, 0 \leq x < 1$ के लिए

$[x] = 1, 1 \leq x < 2$ के लिए

$[x] = 2, 2 \leq x < 3$ के लिए, इत्यादि।

2.1.5 वास्तविक फलनों का बीजगणित (*Algebra of real functions*)

(i) **दो वास्तविक फलनों का योग**

मान लीजिए कि $f: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ तथा $g: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}$ तब हम $(f+g): \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in \mathrm{X}$ के लिए $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

(ii) **एक वास्तविक फलन से दूसरे को घटाना**

मान लीजिए कि $f: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ तथा $g: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $\mathrm{X} \subseteq \mathbf{R}$ तब हम $(f-g): \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in \mathrm{X}$ के लिए, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

(iii) **एक अदिश (*Scalar*) गुणन**

मान लीजिए कि $f: x \to \mathrm{R}$ एक वास्तविक फलन है तथा α एक अदिश है जो $\mathbf{R}$ में है, तब गुणनफल αf, X से $\mathbf{R}$ में एक फलन है, जो $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in \mathrm{X}$ द्वारा परिभाषित है।

(iv) **दो वास्तविक फलनों का गुणन:** मान लीजिए कि $f: \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ तथा $g: x \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $\mathrm{X} \subseteq \mathbf{R}$, तब इन दोनों फलनों का गुणनफल

$(f g)(x) = f(x) \,.\, g(x) \;\forall\; x \in \mathrm{X}$ द्वारा परिभाषित फलन $f g: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ है।

(v) **दो वास्तविक फलनों का भागफल:** मान लीजिए कि f तथा g, **X** से **R** में परिभाषित दो वास्तविक फलन हैं। प्रतीक $\frac{f}{g}$ से निर्दिष्ट (denote), f का g से भागफल, नियम

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0, x \in \mathrm{X}$ द्वारा परिभाषित **X** से **R** में एक फलन है।

> **टिप्पणी** योगफल फलन $f+g$, अंतर फलन $f-g$ और गुणनफल fg में से प्रत्येक का प्रांत
>
> $= \{x : x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g\}$
>
> जहाँ $\mathrm{D}_f = f$ का प्रांत,
>
> $\mathrm{D}_g = g$ का प्रांत।
>
> फलन का प्रांत $= \frac{f}{g}$ का प्रांत
>
> $= \{x : x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$ और $g(x) \neq 0\}$

2.2 हल किये हुए उदाहरण

संक्षिप्त उत्तर वाले (S.A)

उदाहरण 1 मान लीजिए कि $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $\mathrm{B} = \{5, 7, 9\}$ ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$

(iii) क्या $A \times B = B \times A$? (iv) क्या $n(A \times B) = n(B \times A)$?

हल चूँकि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{5, 7, 9\}$, अत:

(i) $A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (1, 9), (2, 5), (2, 7),$
$(2, 9), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$

(ii) $B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (7, 1), (7, 2),$
$(7, 3), (7, 4), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4)\}$

(iii) नहीं, $A \times B \neq B \times A$ क्योंकि $A \times B$ और $B \times A$ में तथ्यत: एक समान क्रमित युग्म नहीं हैं।

(iv) $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 4 \times 3 = 12$

$n(B \times A) = n(B) \times n(A) = 4 \times 3 = 12$

अत: $n(A \times B) = n(B \times A)$

उदारहण 2 x और y ज्ञात कीजिए, यदि,

(i) $(4x + 3, y) = (3x + 5, -2)$ (ii) $(x - y, x + y) = (6, 10)$

हल

(i) चूँकि $(4x + 3, y) = (3x + 5, -2)$, इसलिए

$4x + 3 = 3x + 5$

या $x = 2$

तथा $y = -2$

(ii) $x - y = 6$

$x + y = 10$

$\therefore$ $2x = 16$

या $x = 8$

$8 - y = 6$

$\therefore$ $y = 2$

उदाहरण 3 यदि $A = \{2, 4, 6, 9\}$ और $B = \{4, 6, 18, 27, 54\}$, $a \in A$, $b \in B$, तो क्रमित (a, b) 'a', 'b' का एक गुणनखंड है और $a < b$.

हल क्योंकि संख्या 2, संख्या 4 का एक गुणनखंड है तथा $2 < 4$, इसलिए (2, 4) इस प्रकार का एक क्रमित युग्म है।

इसी प्रकार (2, 6), (2, 18), (2, 54) इसी प्रकार के अन्य क्रमित युग्म हैं।

अतः {(2, 4), (2, 6), (2, 18), (2, 54), (6, 18), (6, 54,), (9, 18), (9, 27), (9, 54)} क्रमित युग्मों का अभीष्ट समुच्चय है।

उदारहण 4 $R = \{(x, y) : y = x + \frac{6}{x}$; जहाँ $x, y \in \mathbf{N}$ और $x < 6\}$ द्वारा प्रदत्त (given) संबंध का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल जब $x = 1, y = 7 \in \mathbf{N}$, अतएव $(1, 7) \in R$

पुनः जब $x = 2$. $y = 2+\frac{6}{2} = 5 \in \mathbf{N}$,

अतएव $(2, 5) \in R$ पुनः जब $x = 3,\ y = 3 + \frac{6}{3} = 5 \in \mathbf{N}$, $(3, 5) \in R$ इसके अतिरिक्त $x = 4$ के लिए $y = 4 + \frac{6}{4} \notin \mathbf{N}$ तथा $x = 5$ के लिए $y = 5 + \frac{6}{5} \notin \mathbf{N}$

अतः $R = \{(1, 7), (2, 5), (3, 5)\}$, जहाँ R का प्रांत = {1, 2, 3} और R का परिसर = {7, 5}

उदाहरण 5 क्या निम्नलिखित संबंध फलन हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $R_1 = \{(2, 3), (\frac{1}{2}, 0), (2, 7), (-4, 6)\}$

(ii) $R_2 = \{(x, |x|) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है}

हल

क्योंकि (2, 3) और $(2, 7) \in R_1$

$\Rightarrow$ $R_1(2) = 3$ तथा $R_1(2) = 7$

इसलिए $R_1(2)$ का एक अद्वितीय प्रतिबिंब नहीं है। अतः R_1 एक फलन नहीं है।

(iii) $R_2 = \{(x, |x|) / x \in \mathbf{R}\}$

प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ का एक अद्वितीय **प्रतिबिंब** $|x| \in \mathbf{R}$ है

अतः R_2 एक फलन है।

उदाहरण 6 वह प्रांत ज्ञात करो जिसके लिए फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ और $g(x) = 1 - 3x$ समान हैं।

हलः

यदि $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$ $2x^2 - 1 = 1 - 3x$

$\Rightarrow \qquad 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow \qquad (2x - 1)(x + 2) = 0$

अत: वह प्रांत जिसके लिए $f(x) = g(x)$, $\left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$ है।

उदाहरण 7 निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का प्रांत ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$ (ii) $f(x) = [x] + x$

हल

(i) $f(x)$ $\frac{g(x)}{h(x)}$ रूप का एक परिमेय फलन है, जहाँ $g(x) = x$ तथा $R(x) = x^2 + 3x + 2$

अब $h(x) \neq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) \neq 0$

अत: प्रदत्त फलन f का प्रांत $\mathbf{R} - \{-1, -2\}$ है।

(ii) $f(x) = [x] + x$, अर्थात् $f(x) = h(x) + g(x)$,

जहाँ $h(x) = [x]$ और $g(x) = x$

$h(x)$ का प्रांत $= \mathbf{R}$ और $g(x)$ का प्रांत $= \mathbf{R}$

अत: f का प्रांत $= \mathbf{R}$

उदाहरण 8 निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{|x-4|}{x-4}$ (ii) $\sqrt{16 - x^2}$

हल

(i) $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4} = \begin{cases} \frac{x-4}{x-4} = 1, & x > 4 \\ \frac{-(x-4)}{x-4} = -1, & x < 4 \end{cases}$

अत: $\frac{|x-4|}{x-4}$ का परिसर $= \{1, -1\}$

(ii) f का प्रांत, जहाँ $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $[-4, 4]$ है।

परिसर के लिए, मान लीजिए कि $y = \sqrt{16 - x^2}$,

तो $y^2 = 16 - x^2$

या $x^2 = 16 - y^2$

क्योंकि $x \in [-4, 4]$

अतः f का परिसर = [0, 4]

उदाहरण 9 फलन $f(x) = |x-1| + |1+x|,\ -2 \leq x \leq 2$ को पुनः परिभाषित (Redefine) कीजिए।

हलः $f(x) = |x-1| + |1+x|, -2 \leq x \leq 2$

$$= \begin{cases} -x+1 \ -1-x, & -2 \leq x < -1 \\ -x+1 \ +x+1, & -1 \leq x < 1 \\ x-1 \ +1+x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x \ , & -2 \leq x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

उदाहरण 10 फलन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[x]^2 - [x] - 6}}$ f परिभाषित होगा यदि $[x]^2 - [x] - 6 > 0$

या $([x]-3)([x] + 2) > 0$,

$\Rightarrow$ $[x] < -2$ या $[x] > 3$

$\Rightarrow$ $x < -2$ या $x \geq 4$

अतः प्रांत = $(-\infty, -2) \cup [4, \infty)$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

दिये हुए चार संभव उत्तरों में से सही उत्तर चुनिए (M.C.Q.)

उदाहरण 11 निम्नलिखित में से कौन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत है।

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R}^+$

(C) $\mathbf{R}^-$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल: सही उत्तर (D) है। $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ प्रदत्त है,

जहाँ $$x - |x| = \begin{cases} x-x=0 & \text{यदि } x \geq 0 \\ 2x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

अत: $\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$, किसी भी $x \in \mathbf{R}$ के लिए परिभाषित नहीं है। अत: f, किसी भी $x \in \mathbf{R}$ के लिए परिभाषित नहीं है, अर्थात् दिये हुए विकल्पों में से कोई भी f का प्रांत नहीं है।

उदाहरण 12 यदि $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ तो $f(x) + f(\dfrac{1}{x})$ निम्नलिखित में से किसके बराबर है:

(A) $2x^3$ (B) $\dfrac{2}{x^3}$ (C) 0 (D) 1

हल सही चयन (C) है।

क्योंकि $$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

इसलिए $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} - x^3$$

अत: $$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} - x^3 = 0$$

उदाहरण 13 मान लीजिए कि A तथा B कोई ऐसे दो समुच्चय हैं कि $n(\text{B}) = p$, $n(\text{A}) = q$, तो समुच्चयों $f : \text{A} \to \text{B}$ कुल संख्या __________ है।

हल: A का कोई भी अवयव मान लीजिए कि x_i समुच्चय B के अवयवों से p तरीके से संबद्ध किया जा सकता है। अत: अभीष्ट समुच्चयों की तथ्यत: संख्या p^q है।

उदाहरण 14 मान लीजिए कि f तथा g निम्नलिखित दो फलन हैं,

$f = \{(2, 4), (5, 6), (8, -1), (10, -3)\}$

$g = \{(2, 5), (7, 1), (8, 4), (10, 13), (11, -5)\}$ तो $f + g$ का प्रांत __________ होगा।

हल: क्योंकि f का प्रांत = $D_f = \{2, 5, 8, 10\}$ तथा g का प्रांत = $D_g = \{2, 7, 8, 10, 11\}$ इसलिए $f + g$ का प्रांत = $\{x \mid x \in D_f \cap D_g\} = \{2, 8, 10\}$

2.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. मान लीजिए कि $A = \{-1, 2, 3\}$ तथा $B = \{1, 3\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times B$ (ii) $B \times A$

(iii) $B \times B$ (iv) $A \times A$

2. यदि $P = \{x : x < 3, x \in \mathbf{N}\}$, $Q = \{x : x \leq 2, x \in \mathbf{W}\}$, तो $(P \cup Q) \times (P \cap Q)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ W पूर्ण संख्याओं (ऋणेत्तर पूर्णांकों) का समुच्चय है।

3. यदि $A = \{x : x \in \mathbf{W}, x < 2\}$ $B = \{x : x \in \mathbf{N}, 1 < x < 5\}$ $C = \{3, 5\}$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $A \times (B \cup C)$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक में a तथा b ज्ञात कीजिए:

(i) $(2a + b, a - b) = (8, 3)$ (ii) $\left(\frac{a}{4}, a - 2b\right) = (0, 6 + b)$

5. दिया हुआ है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$ तो उन क्रमित युग्मों को ज्ञात कीजिए, जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं:

(i) $x + y = 5$ (ii) $x + y < 5$ (iii) $x + y > 8$

6. यदि $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{W}, x^2 + y^2 = 25\}$ प्रदत्त है। R का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

7. यदि $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2x + 7$, जहाँ $x \in \mathbf{R}$ और $-5 \leq x \leq 5\}$ एक संबंध है तो R_1 का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

8. यदि $R_2 = \{(x, y) \mid x$ और y पूर्णांक हैं और $x^2 + y^2 = 64\}$ एक संबंध है, तो R_2 ज्ञात कीजिए (रोस्टर रूप में लिखिए)।

9. यदि $R_3 = \{(x, |x|) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$ एक संबंध है, तो R_3 का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

10. क्या नीचे दिये गये संबंध फलन हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए:

(i) $h = \{(4, 6), (3, 9), (-11, 6), (3, 11)\}$

(ii) $f = \{(x, x) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

(iii) $g = \quad n, \frac{1}{n} \mid n$ एक धन पूर्णांक है

(iv) $s = \{(n, n^2) \mid n$ एक धन पूर्णांक है$\}$

(v) $t = \{(x, 3) \mid x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$

11. यदि f तथा g, नियम $f(x) = x^2 + 7$ तथा $g(x) = 3x + 5$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन हैं, तो निम्नलिखित में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए:

(a) $f(3) + g(-5)$ (b) $f\left(\frac{1}{2}\right) \times g(14)$

(c) $f(-2) + g(-1)$ (d) $f(t) - f(-2)$

(e) $\frac{f(t) - f(5)}{t-5}$, यदि $t \neq 5$

12. मान लीजिए कि $f(x) = 2x + 1$ तथा $g(x) = 4x - 7$ द्वारा परिभाषित f तथा g वास्तविक फलन हैं, तो

(a) किन वास्तविक संख्याओं x के लिए, $f(x) = g(x)$?

(b) किन वास्तविक संख्याओं x के लिए, $f(x) < g(x)$?

13. यदि $f(x) = 2x + 1$ तथा $g(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित f तथा g दो वास्तविक फलन हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $f + g$ (ii) $f - g$ (iii) fg (iv) $\frac{f}{g}$

14. निम्नलिखित फलन को क्रमित युग्मों में वर्णित कीजिए और उसका परिसर ज्ञात कीजिए:
$f : \mathrm{X} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 1$, जहाँ $\mathrm{X} = \{-1, 0, 3, 9, 7\}$

15. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन $f(x) = 3x^2 - 1$ और फलन $g(x) = 3 + x$ समान हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A)

16. क्या $g(x) = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ एक फलन है? औचित्य भी बताइए। यदि इसे नियम $g(x) = \alpha x + \beta$ द्वारा वर्णित किया जाये तो α और β को क्या मान दिया जा सकता है?

17. नीचे दिये फलनों में से प्रत्येक का प्रांत ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + |x|}}$ (iii) $f(x) = x\,|x|$

(iv) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 - 1}$ (v) $f(x) = \frac{3x}{2x - 8}$

18. नीचे दिये फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = \frac{3}{2-x^2}$ (ii) $f(x) = 1 - |x-2|$

(iii) $f(x) = |x-3|$ (iv) $f(x) = 1 + 3\cos 2x$

(**संकेत :** $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos 2x \le 3 \Rightarrow -2 \le 1 + 3\cos 2x \le 4$)

19. फलन $f(x) = |x-2| + |2+x|$, $-3 \le x \le 3$ को पुनः परिभाषित कीजिए।

20. यदि $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ (ii) $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{f(x)}$

21. मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$ दो फलन प्रांत $R^+ \cup \{0\}$ में परिभाषित हैं तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $(f+g)(x)$ (ii) $(f-g)(x)$

(iii) $(fg)(x)$ (iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22. फलन $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

23. यदि $f(x) = y = \frac{ax-b}{cx-a}$, तो सिद्ध कीजिए कि $f(y) = x$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

संख्या 24 *से* 35 *तक के प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए* (M.C.Q.)

24. मान लीजिए कि $n(A) = m$, और $n(B) = n$, तो A से B में परिभाषित किये जा सकने वाले अरिक्त संबंधों की कुल संख्या

(A) m^n (B) $n^m - 1$

(C) $mn - 1$ (D) $2^{mn} - 1$

25. यदि $[x]^2 - 5[x] + 6 = 0$, जहाँ प्रतीक [ ] महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है, तो

(A) $x \in [3, 4]$ (B) $x \in (2, 3]$

(C) $x \in [2, 3]$ (D) $x \in [2, 4)$

26. $f(x) = \dfrac{1}{1-2\cos x}$ का परिसर

(A) $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$ (B) $\left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$

(C) $(-\infty, -1] \cup \left[\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ (D) $\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$ है।

27. मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, तो

(A) $f(xy) = f(x) \,.\, f(y)$ (B) $f(xy) \geq f(x) \,.\, f(y)$

(C) $f(xy) \leq f(x) \,.\, f(y)$ (D) इनमें से कोई नहीं

[**संकेत :** $f(xy) = \sqrt{1+x^2y^2}$, $f(x) \,.\, f(y) = \sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2+1}$]

28. $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a > 0)$ का प्रांत है

(A) $(-a, a)$ (B) $[-a, a]$

(C) $[0, a]$ (D) $(-a, 0]$ है।

29. यदि $f(x) = ax + b$, जहाँ a और b पूर्णांक हैं। यदि $f(-1) = -5$ और $f(3) = 3$, तो

(A) $a = -3, b = -1$ (B) $a = 2, b = -3$

(C) $a = 0, b = 2$ (D) $a = 2, b = 3$

30. $f(x) = \sqrt{4-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत

(A) $(-\infty, -1) \cup (1, 4]$ (B) $(-\infty, -1] \cup (1, 4]$

(C) $(-\infty, -1) \cup [1, 4]$ (D) $(-\infty, -1) \cup [1, 4)$ है।

31. $f(x) = \dfrac{4-x}{x-4}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर निम्नलिखित प्रकार है,

(A) प्रांत = **R**, परिसर = $\{-1, 1\}$

(B) प्रांत = **R** – $\{1\}$, परिसर = **R**

(C) प्रांत = **R** – $\{4\}$, परिसर = $\{-1\}$

(D) प्रांत = **R** – $\{-4\}$, परिसर = $\{-1, 1\}$

32. $f(x) = \sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f के प्रांत तथा परिसर निम्नलिखित प्रकार है,

(A) प्रांत = $(1, \infty)$, परिसर = $(0, \infty)$

(B) प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $(0, \infty)$

(C) प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $[0, \infty)$

(D) प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $[0, \infty)$

33. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$ द्वारा प्रदत्त (given) फलन f का प्रांत

(A) $\mathbf{R} - \{3, -2\}$ (B) $\mathbf{R} - \{-3, 2\}$

(C) $\mathbf{R} - [3, -2]$ (D) $\mathbf{R} - (3, -2)$

34. $f(x) = 2 - |x-5|$ द्वारा प्रदत्त फलन f का प्रांत तथा परिसर निम्नलिखित प्रकार है,

(A) प्रांत = $\mathbf{R}^+$, परिसर = $(-\infty, 1]$

(B) प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = $(-\infty, 2]$

(C) प्रांत = $\mathbf{R}$, परिसर = $(-\infty, 2)$

(D) प्रांत = $\mathbf{R}^+$, परिसर = $(-\infty, 2]$

35. वह प्रांत जिसके लिए $f(x) = 3x^2 - 1$ तथा $g(x) = 3 + x$ द्वारा परिभाषित फलन f तथा g समान हैं,

(A) $\left\{-1, \dfrac{4}{3}\right\}$ (B) $\left[-1, \dfrac{4}{3}\right]$

(C) $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$ (D) $\left[-1, \dfrac{4}{3}\right)$

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

36. मान लीजिए कि

$f = \{(0, 1), (2, 0), (3, -4), (4, 2), (5, 1)\}$

$g = \{(1, 0), (2, 2), (3, -1), (4, 4), (5, 3)\}$

दो प्रदत्त वास्तविक फलन हैं, तो $f. g$ का प्रांत __________ है।

37. मान लीजिए कि $f = \{(2, 4), (5, 6), (8, -1), (10, -3)\}$

$g = \{(2, 5), (7, 1), (8, 4), (10, 13), (11, 5)\}$

दो प्रदत्त वास्तविक फलन हैं, तो निम्नलिखित का सही मिलान (Match) कीजिए:

(a) $f - g$	(i) $\left\{\left(2, \frac{4}{5}\right), \left(8, \frac{-1}{4}\right), \left(10, \frac{-3}{13}\right)\right\}$
(b) $f + g$	(ii) $\{(2, 20), (8, -4), (10, -39)\}$
(c) $f \cdot g$	(iii) $\{(2, -1), (8, -5), (10, -16)\}$
(d) $\frac{f}{g}$	(iv) $\{(2, 9), (8, 3), (10, 10)\}$

बताइए कि प्रश्न संख्या 38 से 42 तक में दिये कथन सत्य हैं या असत्य है:

38. क्रमित युग्म (5, 2) संबंध $R = \{(x, y) : y = x - 5, x, y \in \mathbf{Z}\}$ में है।

39. यदि $P = \{1, 2\}$, तो $P \times P \times P = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 1)\}$

40. यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ तथा $C = \{4, 5, 6\}$, तो $(A \times B) \cup (A \times C)$
$= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

41. यदि $(x - 2, y + 5) = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$, तो $x = 4$, $y = \frac{-14}{3}$

42. यदि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, तो $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$